数理解析研究所講究録
472巻 1982年 136-142

Discretization of soliton equations

京大 数理研 三輪 哲二
Miwa Tetsuji
神保 道夫
Jimbo Michio
教養 伊達 悦朗
Date Etsuro

ソリトン方程式を，N－ソリトン解を持つという性質を保って，discrete化するという問題は，種々の立場から扱われている．このノートでは，そのうちの一つである広田氏の結果[1]，及びそれに続く，三輪の結果[2]を一般化した，一つの方法について述べる．詳細については，我々のプレプリント（RIMS. 401, 403, 4　, 4　, 4　）に ゆずることにして，以下では，その概略について述べる．

我々は，以前の論文[3]において，free fermion の言葉を援用して，（continuous な）ソリトン方程式の解の変換群を考察した。ソリトン方程式を扱う方法として，二つの主要な方法が知られている。一つは，線型化（ソリトン方程式を，線型方程式系の可積分条件に表わすこと）であり，もう一つは，双線型化（従属変数の変換により，方程式を双線型な形に表わすこと）である．我々の（continuous な場合の）

考察の基礎となったのは、線型方程式系の解（wave function）ψが、双線型方程式の解（τ-函数，広田の変数）が、クリフォード群の元を時間発展させたものの、真空期待値の形に表わされるということであった。この事実は又、τ-函数同志、あるいはτ-函数とwave functionがみたす、bilinear identity と呼ぶ、関係式の帰結であった。我々のdiscretizationは、このbilinear identityを出発点として行われる。free fermionの言葉でいえば、時間発展をとりかえることにあたる（continuousな場合のexponential function $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j)$ をrational function $(1-ak)^{-l}(1-bk)^{-m}\cdots$ ，a.b：パラメーター，l. $m, \cdots, \in \mathbb{Z}$ にする）。従って，解の変換群は不変である。

nonlinear Schrödinger 方程式

$$i q_t + q_{xx} - 2 q^* q^2 = 0$$

$$-i q^*_t + q^*_{xx} - 2 q^{*2} q = 0$$

を例にして、もう少し詳しく述べよう．

この方程式は，2成分KP hierarchyのreductionの一つである．2成分KP hierarchyのreductionに対するbilinear identityは次のものがある．

$$0=\oint\frac{dk}{2\pi i k}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2'+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1}))+k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1}))\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq l_1'+l_2',$$

$$p^s w^{(\alpha)}_{l_1+1,l_2+1}(x-y;p)\,\tau_{l_1',l_2'}(x'-y')\,e^{\xi(y-y',p)}$$

$$=\oint\frac{dk}{2\pi i k}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1});p)+\frac{k}{k-p}k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1});p)\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq -1+l_1'+l_2'.$$

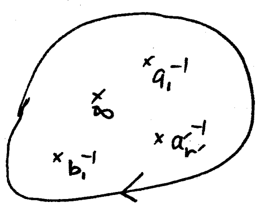
ここで．$\tau_{l_1,l_2}(x)$, $l_1, l_2\in\mathbb{Z}$ は τ 一函数，$w^{(\alpha)}_{l_1 l_2}(x;k)$ $\alpha=1,2$, $l_1,l_2\in\mathbb{Z}$ は wave function である．この bilinear identity は任意の x, x', y, y', $x=(x_1,x_2,\cdots)$ について成り立つ．更に．上の積分路は．$\oint\frac{dk}{2\pi i k}=1$ となるような $k=\infty$ のまわりの contour であり．

$\xi(x,k)=\sum_{j=1}^{\infty}x_j k^j$,　$\epsilon(a)=(a,\frac{1}{2}a^2,\frac{1}{3}a^3,\cdots)$ である．

この identity で

$$x-x'=\sum_{i=1}^{r}\epsilon(a_i)-\sum_{j=1}^{r'}\epsilon(a_j'),\quad y-y'=\sum_{i=1}^{t}\epsilon(b_i)-\sum_{j=1}^{t'}\epsilon(b_j'),$$

a_i, a_j', b_i, b_j' は、その逆数が、上の積分路の内部にあるような数、とおけば、



$$e^{\xi(\epsilon(a),k)}=(1-ak)^{-1}$$

に注意して、

$$\tau_{l_1l_2}(n_1,n_2,\ldots,n_1',n_2',\ldots,m_1,m_2,\ldots,m_1',m_2'\ldots)$$

$$=\tau_{l_1l_2}(x-y+n_1\epsilon(a_1)+n_2\epsilon(a_2)+\cdots+n_1'\epsilon(a_1')+n_2'\epsilon(a_2')+\cdots)$$

$$w^{(\infty)}_{l_1l_2}(n_1,n_2,\ldots,n_1',n_2',\ldots,m_1,m_2,\ldots,m_1',m_2',\ldots)$$

$$=w^{(\infty)}_{l_1l_2}(x-y+n_1\epsilon(a_1)+n_2\epsilon(a_2)+\cdots\quad ;k)$$

に対する方程式が得られる。

この操作は、KP hierarchy を扱う際に用いる free fermion $\psi(k)$ $\psi^*(k)$ の時間発展を、continuous な場合には、

$$\psi(k)\longmapsto e^{\xi(x,k)}\psi(k),\quad \psi^*(k)\mapsto e^{-\xi(x,k)}\psi^*(k)$$

であったものを

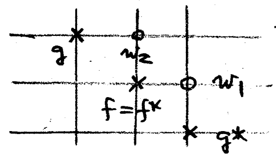
$$\psi(k)\longmapsto\frac{(1-a_1'k)^{n_1'}\cdots}{(1-a_1k)^{n_1}\cdots}\,\frac{(1-b_1'k)^{m_1'}\cdots}{(1-b_1k)^{m_1}\cdots}\,\psi(k)$$

$$\psi^*(k)\longmapsto\frac{(1-a_1k)^{n_1}\cdots}{(1-a_1'k)^{n_1'}\cdots}\,\frac{(1-b_1k)^{m_1}}{(1-b_1'k)^{m_1'}}\,\psi^*(k)$$

としたことにあたる。($r, r', t, t', a_i, a_j', b_i, b_j'$ を任意に動かすことにより、得られる方程式全体は、元の bilinear identity と同値になる)

$$f^* = f = \tau_{l_1 l_2}, \quad g^* = \tau_{l_1+1, l_2-1}, \quad g = \tau_{l_1-1, l_2+1}$$

$$w_1 = w^{(\alpha)}_{l_1+1, l_2}, \quad w_2 = w^{(\alpha)}_{l_1, l_2+1}$$



なる組み合わせで、パラメーターを高々2個 (a, b) 含む方程式を、とり出せば、例えば、次の式が得られる。

$$f(1,0)f(0,1) - f(11)f(00) - ab\, g^*(11)g(00) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} v_1(-1) \\ v_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \mathfrak{g}^*(0)\, \mathfrak{g}(-1) - a\hat{k} + 1 & a\, \mathfrak{g}^*(0) \\ a\, \mathfrak{g}(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix},$$

$$f(n,m) = f(x - y + n\epsilon(a) + m\epsilon(b)), \ \text{etc.}$$

$$v_i = \frac{w_i}{f}, \quad \mathfrak{g} = \frac{g}{f}, \quad \mathfrak{g}^* = \frac{g^*}{f}.$$

前者の式が、nonlinear Schrödinger 方程式の、双線型化の形での discretization で、後者が、線型方程式の discretization である。従属変数 $\mathfrak{g}$ での nonlinear Schrödinger 方程式の discretization は、後者の可積分条件として与えられ、

$$(1+ab\,g^*(1,1)\,g(0,0))(a\,g(0,1)-b\,g(1,0)) = (a-b)\,g(0,0)$$

$$(1+ab\,g^*(1,1)\,g(0,0))(a\,g^*(1,0)-b\,g^*(0,1)) = (a-b)\,g^*(1,1)$$

となる。

$a, b \to 0$ とすることにより、continuous な、双線型方程式、線型方程式、非線型方程式が回復される。

$$D_1^2 f\cdot f + 2 g^*\cdot g = 0,$$

$$\partial_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -g^* \\ -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - g^* g & -k g^* - \partial_1 g^* \\ -k g + \partial_1 g & g^* g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 g + \partial_1^2 g - 2 g^* g^2 = 0$$

$$-\partial_2 g^* + \partial_1^2 g^* - 2 g^{*2} g = 0 \qquad x_2 = -it.$$

discrete 化した、nonlinear Schrödinger 方程式のソリトン解は、上に述べた、時間発展の取り扱いを考慮すれば、continuous な場合の式から容易に得られる。

ここであげた以外の $\tau_{\ell_1 \ell_2}$ の組みあわせから得られる、ソリトン方程式、KP 以外の hierarchy のソリトン方程式については、プレプリントを参照して下さい。

References

1. R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3785
2. T. Miwa, Proc. Japan Acad. **58** A (1982). 9.
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa,
   J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 3806, 3813
   Physica **4** D (1982) 343
   RIMS preprint 394.